黎曼积分的单调收敛定理

Brian S. Thomson

摘要 对于 Riemann (黎曼) 积分，单调收敛定理成立，如果 (当然要) 假设极限函数是黎曼可积的. 虽然，也许会想，对于本科课程而言其证明是困难的，因而并不合适. 事实上，其本身是初等的：在 Lebesgue (勒贝格) 理论中，唯极限函数的可积性是难点. 本文展示了如何利用一个简单的紧性论证 (即，要援引 Cousin (库赞) 引理 1)) 来证明黎曼积分的单调收敛定理. 对于被强行灌输这个过时但仍然流行的积分理论的学生，我们可以合理地、恰当地把这个素材用于课堂教学.

通常，是对勒贝格积分叙述并证明单调收敛定理的，而对黎曼积分确切叙述和证明它的某种形式存在着一些困难.

单调收敛定理 令 $\{f_n\}$ 是区间 $[a,b]$ 上黎曼可积函数的一个非减序列. 假设对 $[a,b]$ 中的每个 x, 有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

如果 f 在 $[a,b]$ 上也是黎曼可积的，则

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx. \tag{1}$$

在课堂教学的很多情形这个定理是有用的，但是它并未出现在任何一本通常的教科书中. 其原因也许是：因为此定理的勒贝格形式是难的，由此似乎得到其黎曼形式也较学生应该学的在程度上要深些. 恒等式 (1) 在勒贝格理论中并不深奥，而其结论 “这样一个极限函数必定是可积的” 是深奥的. 这里，我们假设了极限函数的可积性，因而定理是完全初等的.

讲授这个定理给教师提供了一些实际的机会. 首先，是在初等水平上引进积分理论的一个重要定理，并且讨论它的重要性以及怎样能改进的机会. 其次，是开始一种以黎曼积分为背景的辩论机会 (总是吸引人的). “极限函数是可积的” 这一不好的假设在这里是本质的，它把单调收敛定理归为另类：在大多数应用中，关于极限函数我们除了知道它是一列可积函数的点态极限外并不知道其它任何性质，并且在黎曼积分的条件下找出某

译自：The Amer. Math. Monthly, Vol.117 (2010), No.6, p.547–550, Monotone Convergence Theorem for the Riemann Integral, Brian S. Thomson.

1) 库赞引理：令 C 是闭区间 $[a,b]$ 的一个完全覆盖，即对每个 $x\in[a,b]$, 存在一个数 $\delta>0$, 使得 C 包含 $[a,b]$ 的所有长度小于 δ, 并且包含 x 的子区间. 那么存在 $(a=)x_0<x_1<\cdots<x_n(=b)$, 使得对所有 $1\le i\le n$, 有 $[x_{i-1},x_i]\in C$.—— 译注

些性质确有严重的困难.

单调收敛定理的证明是黎曼和的巧妙处理，并且如黎曼积分理论中证明的任何其它定理那样，它肯定是容易理解的.

我们需要一些准备. 所谓区间 $[a,b]$ 的一个 划分 (*partition*), 我们是指区间 – 点对的一个集合

$$\pi=\{([u_i,v_i],w_i)\colon i=1,2,\ldots,n\},$$

其中 $w_i\in[u_i,v_i]$, $i=1,2,\ldots,n$, 并且区间的集合 $\{[u_i,v_i]\colon i=1,2,\ldots,n\}$ 是不重叠区间的集合，它们的并是 $[a,b]$. 一个划分的任何一个子集是一个 子划分. 毫无疑问，希腊字母 π 的使用将干扰微积分课，但我喜欢用它.

定义为黎曼和的极限的黎曼积分显然还具有下述较强的性质：

(*) *若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上是黎曼意义下可积的，则对每个 $\epsilon>0$, 存在一个 $\delta>0$, 使得*

$$\sum_{([u,v],w)\in\pi}\left|\int_u^v f(x)\,dx-f(w)(v-u)\right|<\epsilon, \tag{2}$$

只要 π 是区间 $[a,b]$ 的一个划分或子划分，使得对每对 $([u,v],w)\in\pi$ 有 $v-u<\delta$.

这个众所周知的性质在微积分课程中很少被证明，虽然它只是利用黎曼和的一个简单的计算. 总之，应该证明这个性质，因为由 (2) 立即推得

$$\sum_{([u,v],w)\in\pi}\omega_f([u,v])(v-u)<2\epsilon, \tag{3}$$

这是用子区间上函数 f 的振幅 ω_f 来表示可积性的黎曼的著名的刻划. 然后，这就导致勒贝格容易地系统讲述其更有名的刻划. 因此在 (*) 中有很多值得解释之处.

虽然 (*) 的证明是初等的，但它足够地精细，以致在没有指导的情况下学生要完成它会有困难的. 这里 [2, p.77] 中的方法是有效的，可以认为它应归功于 Saks [3], 是 Saks 把此方法用于 Burkill 积分的研究之中的.

现在我们可以提出单调收敛定理的证明了. 对每个整数 n, 令 $g_n=f-f_n$. 则可积函数序列 $\{g_n\}$ 是非负的和单调减的，并且在每个 x 处有 $\lim_{n\to\infty}g_n(x)=0$.

令 $\epsilon>0$, 并记 $\eta=\epsilon/(b-a+1)$. 对于每个整数 n, 利用 (*) 来选取一个正数 δ_n, 使得

$$\sum_{([u,v],w)\in\pi}\left|\int_u^v g_n(x)\,dx-g_n(w)(v-u)\right|<\eta 2^{-n},$$

只要 π 是区间 $[a,b]$ 的一个划分，使得对每对 $([u,v],w)\in\pi$ 有 $v-u<\delta_n$. 对于每个 $x\in[a,b]$, 选取使得

$$g_n(x)<\eta\qquad\text{对所有整数 } n\geq N(x)$$

成立的第一个整数 $N(x)$, 并令

$$E_j=\{x\in[a,b]\colon N(x)=j\},\qquad j=1,2,3,\ldots.$$

我们利用这些集合来定义当 $x\in E_j$ 时 $\delta(x)=\delta_j$.

取区间 $[a,b]$ 的任意划分 π, 对每对 $([u,v],w)\in\pi$ 它满足 $v-u<\delta(w)$. 这样的划分的存在性是库赞引理的结论. 库赞引理与实直线上的区间套性质 (下转 249 页)

****

(上接 283 页) 起同样的作用，并且等价于区间套性质. 微积分学中的许多定理都能方便地利用这两个论证中的任一个论证 (见 [1], [4] 和 [5] 中的讨论).

对于 π 中区间 - 点对 $([u,v],w)$ 的有限集合，令 N 是 $N(w)$ 的最大值. 对于整数 $j=1,2,3,\ldots,N$, 我们把划分 π 分成 N 个不相交的子集，记为

$$\pi_j = \{([u,v],w) \in \pi \colon w \in E_j\}, \qquad j = 1,2,3,\ldots,N.$$

注意, $\pi = \pi_1 \cup \pi_2 \cup \cdots \cup \pi_N$, 并且这些集合是互不相交的.

现在令 m 是任一大于 N 的整数. 计算得到

$$\begin{aligned}
0 &\le \int_a^b g_m(x)\,dx = \sum_{([u,v],w)\in\pi} \left(\int_u^v g_m(x)\,dx\right) \\
&= \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{([u,v],w)\in\pi_j}\left(\int_u^v g_m(x)\,dx\right)\right) \le \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{([u,v],w)\in\pi_j}\left(\int_u^v g_j(x)\,dx\right)\right) \\
&\le \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{([u,v],w)\in\pi_j} g_j(w)(v-u) + \eta 2^{-j}\right) \\
&< \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{([u,v],w)\in\pi_j} \eta(v-u) + \eta 2^{-j}\right) < \eta(b-a+1) = \epsilon.
\end{aligned}$$

由此即得等式

$$\int_a^b f(x)\,dx - \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\,dx = 0.$$

(陆柱家 译　　陆昱 校)